**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2020-2021 - ΕΞΑΜΗΝΟ: 3o**

**ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Στατιστικές εκτιμήσεις**

1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

φ(x) = θe-θ(x-10), x > 10

α) Με βάση τις παρατηρήσεις:

15 - 12 - 18 - 20 - 24 - 11 - 26 - 17 - 10 - 21 - 19 - 23

να προσδιοριστεί η παράμετρος θ με την μέθοδο των ροπών.

β) Να αποδειχθεί ότι η φ(x) είναι όντως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η Χ να πάρει τιμή μικρότερη από 20.

1. Από μία παρτίδα 20.000 αξόνων από χυτοσίδηρο ελέγχθηκε ένα δείγμα 180 αξόνων, με επανατοποθέτηση, για να εκτιμηθεί ο αριθμός των ελαττωματικών. Κατά τον έλεγχο βρέθηκαν 3 ελαττωματικοί άξονες. Ζητείται να εκτιμηθεί, με την μέθοδο της μέγιστης πιθανότητας, ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων της παραγωγής.
2. Να βρεθεί, με την μέθοδο της μέγιστης πιθανότητας, η εκτιμήτρια της μέσης τιμής λ της κατανομής Pοissοn.
3. Από ένα πληθυσμό που ακολουθεί κατανομή Pοissοn (π.χ. αφίξεις σε ένα σύστημα) λαμβάνεται δείγμα μεγέθους 200 μονάδων (π.χ. χρονικά διαστήματα «μελέτης»). Η μέση τιμή του δείγματος έχει βρεθεί ίση με 5,4 (π.χ. x1 = 4, x2 = 6, … x200 = 5 αφίξεις). Να προσδιοριστεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής του πληθυσμού.
4. Από την παραγωγή ενός συγκεκριμένου εργοστασίου επιλέχθηκε τυχαία δείγμα 16 συρμάτων. Η μέση τιμή της αντοχής τους σε θραύση υπολογίστηκε ότι ήταν ίση με 400 pοunds. Μεταξύ ποιων τιμών αναμένεται, με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%, ότι βρίσκεται η μέση τιμή της αντοχής των συρμάτων αυτών; Δίνεται ότι η αντοχή των συρμάτων σε θραύση ακολουθεί τη κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με 15 pοunds.

**Παραλλαγή**: … υπολογίστηκε ότι ήταν ίση με 400 pοunds και η τυπική απόκλιση ίση με 15 pοunds. … Δίνεται ότι η αντοχή των συρμάτων σε θραύση ακολουθεί τη κανονική κατανομή.

1. Από ένα τυχαίο δείγμα 2.000 ατόμων που ρωτήθηκαν σχετικά, τα 1.280 τάχθηκαν υπέρ ορισμένης άποψης. Ποια είναι τα όρια εμπιστοσύνης της αναλογίας του συνόλου των ατόμων υπέρ της συγκεκριμένης αυτής άποψης, με επίπεδο σημαντικότητας 5%;
2. Τυχαίο δείγμα μεγέθους n=12 λαμβάνεται από άγνωστο πληθυσμό. Οι τιμές του δείγματος είναι 30 30,5 31 31 32,5 33 31,5 31,5 31 30 31 29. Ζητείται να υπολογιστούν οι κυριότερες σημειακές εκτιμήτριες θέσης και διασποράς και τα 90% διαστήματα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής και της μεταβλητότητας.
3. Για την εκτίμηση του ποσοστού ελαττωματικών ορισμένου τύπου δισκεττών ηλεκτρονικών υπολογιστών εξετάστηκε τυχαίο δείγμα 8000 δισκεττών, από τις οποίες 24 βρέθηκαν ελαττωματικές. Να υπολογιστεί το 99% αμφίπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης, καθώς και το 99% μονόπλευρο ανώτερο όριο εμπιστοσύνης.
4. Μια εμπορική επιχείρηση, για να μπορεί να ελέγχει τον μηχανισμό πλήρωσης και συσκευασίας ενός προϊόντος της σε πακέτα προκαθορισμένου βάρους, χρειάζεται να γνωρίζει το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής - αλλά άγνωστης - τυπικής απόκλισης του βάρους αυτών. Για τον λόγο αυτό παίρνει δείγμα 12 τυχαία επιλεγμένων πακέτων και διαπιστώνει ότι ισχύει s2=9. Ποια είναι τα όρια εμπιστοσύνης της πραγματικής τυπικής απόκλισης του βάρους των πακέτων για α=0,02, δεδομένου ότι το βάρος των πακέτων ακολουθεί την κανονική κατανομή;
5. Ένας ψυχολόγος βρήκε ότι ο χρόνος αντίδρασης των ανθρώπων σε εξωτερικούς ερεθισμούς έχει τυπική απόκλιση 0,05 sec. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το δείγμα των μετρήσεων, που χρειάζεται να κάνει, για να είναι βέβαιος κατά (α) 95% και (β) 99%, ότι το σφάλμα d στην εκτίμηση του μέσου χρόνου αντίδρασης, δεν υπερβαίνει τα 0,01 sec;
6. Μια εταιρία ενδιαφέρεται να εκτιμήσει το ποσοστό των κατοίκων μιας πόλης, που χρησιμοποιεί ένα ορισμένο προϊόν της. Αν το σφάλμα εκτίμησης d δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 3%, με πιθανότητα 95%, να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος που πρέπει να ληφθεί.
7. Έστω ότι οι αποδοχές των εργαζομένων σε μία μεγάλη επιχείρηση ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και μεταβλητότητα σ2. Οι μηνιαίες αποδοχές (σε €) 7 τυχαία επιλεγμένων εργαζομένων είναι 1098, 1120, 1102, 1052, 1032, 977, 890.

α) Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο μισθό μ όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

β) Ποιο θα ήταν το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης αν ήταν γνωστό ότι σ = 70;

γ) Πόσο δείγμα πρέπει να πάρουμε σε αυτή την περίπτωση για να κατασκευάσουμε διάστημα εμπιστοσύνης με εύρος 20 ευρώ;

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων**

1. Σε ένα εργοστάσιο η συσκευασία των προϊόντων σε κουτιά γίνεται αυτόματα και ελέγχεται δειγματοληπτικά. Είναι γνωστό ότι το βάρος των κουτιών ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 0,025 Kgr. Για τον έλεγχο της διαδικασίας, ζυγίστηκαν 6 τυχαία επιλεγμένα κουτιά και τα βάρη τους βρέθηκαν ίσα με: 1,04, 0,97, 0,99, 1,00, 1,02 και 1,01 Kgr. Ζητείται να βρεθεί:

α) Αν χρειάζεται ρύθμιση η μηχανή συσκευασίας, δεδομένου ότι η μέση τιμή του βάρους των κουτιών πρέπει να είναι ίση με 1,00 Kgr (α=0,05)

β) Ποιο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής μέσης τιμής του βάρους των κουτιών, με επίπεδο σημαντικότητας ίσο με 0,01.

1. Μια βιομηχανία λαμπτήρων θέλει να προσδιορίσει τη μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων ορισμένου τύπου που παράγει, για τους οποίους γνωρίζει ότι η τυπική απόκλιση της διάρκειας ζωής τους είναι 120 ώρες. Για τον σκοπό αυτό λαμβάνει ένα τυχαίο δείγμα 100 λαμπτήρων και βρίσκει ότι η μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων του δείγματος είναι 1570 ώρες.

α) Να ελεγχθεί, με επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 και α=0,01 η υπόθεση Η0: μ=1600 έναντι της υπόθεσης Η1: μ≠1600 ώρες.

β) Επίσης να ελεγχθεί η ίδια υπόθεση Η0 έναντι της υπόθεσης Η1: μ<1600 ώρες, αν α=0,05.

1. Η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί κανονική κατανομή. Από ένα δείγμα τιμών της μεγέθους n=20 έχει προκύψει ότι =42 και s=6.

α) Ποιο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης της μεταβλητότητας σ2 με επίπεδο σημαντικότητας α=0,10;

β) Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι σ=6, αν α=0,05.

1. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει καλώδια με μέση τιμή δύναμης θραύσης ίση με 1800 Lb και τυπική απόκλιση ίση με 100 Lb. Για να αυξηθεί η μέση δύναμη θραύσης εφαρμόστηκε δοκιμαστικά μια νέα μέθοδος κατασκευής και μετρήθηκε η δύναμη θραύσης σε ένα τυχαίο δείγμα 50 καλωδίων, που κατασκευάστηκε με την νέα αυτή μέθοδο. Το δείγμα αυτό έδωσε μέση τιμή δύναμης θραύσης ίση με 1850 Lb. Μπορούμε να υποθέσουμε, με επίπεδο σημαντικότητας α=0,01, ότι με την νέα μέθοδο κατασκευής θα αυξηθεί η μέση τιμή της δύναμης θραύσης των καλωδίων;
2. Έστω το τυχαίο δείγμα μετρήσεων 12,1 - 12,3 - 11,8 - 12,8 - 12,4, που προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με 0,4.

Ζητείται :

α) να ελεγχθεί αν η μέση τιμή του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται το δείγμα, έχει μέση τιμή ίση με 12 (α=0,05)

β) να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής μέσης τιμής του πληθυσμού.

1. Τα παρακάτω στοιχεία δίνουν την κατανομή του αριθμού των ελαττωμάτων σε 70 ισομήκη τμήματα πλαστικών σωλήνων.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Aριθμός ελαττωμάτων (xi) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Αριθμός σωλήνων (fi) | 14 | 22 | 17 | 9 | 5 | 2 | 1 |

Ποια κατανομή νομίζετε ότι είναι δυνατόν να προσαρμοστεί (α=0,05);

1. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων του χρόνου διάρκειας 1000 τηλεφωνικών συνδιαλέξεων, σε δευτερόλεπτα. Να εξεταστεί αν η διάρκεια τηλεφωνικής συνδιάλεξης ακολουθεί την κανονική κατανομή (α=0,05).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Κεντρικές τιμές | 50 | 150 | 250 | 350 | 450 | 550 | 650 | 750 | 850 | 950 |
| Συχνότητες | 6 | 28 | 88 | 180 | 247 | 260 | 133 | 42 | 11 | 5 |

1. Ιατρός ερευνητής εξετάζει την επίδραση ενός νέου φαρμάκου στην μείωση της αρτηριακής πίεσης. Για το σκοπό αυτό σε δείγμα 6 ασθενών μετρά την πίεση μια ημέρα πριν και μια ημέρα μετά την χορήγηση του φαρμάκου. Οι τιμές που κατέγραψε είναι:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Πριν | 16,2 | 17,3 | 18,5 | 15,9 | 19,0 | 17,9 |
| Μετά | 15,0 | 16,9 | 17,0 | 15,6 | 18,1 | 17,2 |

α. Μπορεί από την στατιστική ανάλυση του παραπάνω δείγματος να αποδειχθεί μεταβολή στην κατάσταση του ασθενούς από το συγκεκριμένο φάρμακο για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

β. Να υπολογισθεί το σφάλμα β είδους. Τι εκφράζει το μέγεθος αυτό;

1. Τυχαίο δείγμα μεγέθους n=16 λαμβάνεται από κανονικό πληθυσμό. Οι τιμές του δείγματος είναι 30 30,5 31 31 32,5 33 31,5 31,5 31 31,3 30 31,1 30,6 31 29,4 29. Να γίνει στατιστικός έλεγχος της υπόθεσης ότι η μέση τιμή του πληθυσμού είναι μ0 = 31.
2. Δυο διαφορετικές μέθοδοι παραγωγής αμόλυβδης βενζίνης έχουν σαν αποτέλεσμα την παραγωγή βενζίνης με ελαφρά μεταβαλλόμενο αριθμό οκτανίων. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητότητες των δυο μεθόδων έχουν υπολογιστεί με ακρίβεια σε σ1² = 1,8 και σ2² = 1,2. Η εργαστηριακή ανάλυση δυο τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n1=15 και n2=20 κατέγραψε μέσους αριθμούς οκτανίων = 89,6 και = 92,5 αντίστοιχα.

α) Ο κατασκευαστής θέλει να διαπιστώσει αν ο αριθμός οκτανίων της δεύτερης μεθόδου είναι μεγαλύτερος από αυτόν της πρώτης μεθόδου. Να γίνει ο σχετικός έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

β) Αν ο μέσος αριθμός οκτανίων της δεύτερης μεθόδου είναι μεγαλύτερος του μέσου αριθμού οκτανίων της πρώτης μεθόδου κατά 1, ποιά είναι η πιθανότητα του σφάλματος δεύτερου είδους κατά τον έλεγχο με δείγματα μεγέθους n1=15 και n2=20 ;

1. Ο υπεύθυνος μηχανικός θέλει να βεβαιωθεί ότι ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό των παραγόμενων προϊόντων ακολουθεί κανονική κατανομή. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων που έκανε για το σκοπό αυτό σε τυχαίο δείγμα περιέχονται στον παρακάτω πίνακα:

──────────────────────────────────────────────────

106 112 108 109 109 110 105 111 108 109

110 109 108 105 113 108 109 109 108 107

112 109 109 108 107 108 109 108 109 110

111 109 108 106 108 109 110 107 108 109

109 108 109 109 109 110 107 110 108 109

107 108 110 111 108 109 109 106 108 109

108 109 109 109 108 110 108 107 108 109

──────────────────────────────────────────────────

α) Να υπολογιστούν οι αμερόληπτες εκτιμήτριες της μέσης τιμής και της μεταβλητότητας.

β) Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό με κανονική κατανομή.